NUMERI COMPLESSI

La radice quadrata di un numero negativo, ad es.

$$\sqrt{-3}, \sqrt{-5}, \ldots \sqrt{-9} \ldots$$

viene chiamato numero immaginario. Dalle proprietà dei radicali, sappiamo che

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

viene, quindi, introdotto l'operatore immaginario

$i = \sqrt{-1}$ dotato della proprietà $i^2 = -1$

Per l'operatore immaginario, in matematica si usa il postfisso (o anche prefisso) **i** , mentre in elettrotecnica è più frequente trovare il prefisso **j** , ovviamente, perchè il simbolo **i** verrebbe confuso col simbolo della corrente elettrica.
Un numero nella forma

$$a + bi$$

con *a* e *b* numeri reali, viene chiamato numero complesso con
a=parte reale;
b=parte immaginaria ;
I numeri complessi contengono tutti i numeri reali e tutti i numeri immaginari perchè 7=7+0i e 4i=0+4i.
Due numeri complessi a+bi e c+di sono uguali solo se a=c e b=d.
Il coniugato di un numero complesso a+bi è il numero complesso a-bi; cioè è lo stesso numero dato, con la parte immaginaria invertita di segno.

OPERAZIONI ARITMETICHE COI NUMERI COMPLESSI

Addizione : per sommare due numeri complessi si fa la somma delle parti reali e delle parti immaginarie.
Ad es.

$$(2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$$

Sottrazione : per sottrarre due numeri complessi si fa la differenza delle parti reali e delle parti immaginarie.Ad es.

$$(2 + 3i) - (4 - 5i) = (2 - 4) + \left[3 - (-5)\right]i = -2 + 8i$$

Moltiplicazione : per moltiplicare due numeri complessi si effettua il prodotto come se i due numeri fossero dei semplici binomi, sostituendo poi i^2 con -1.

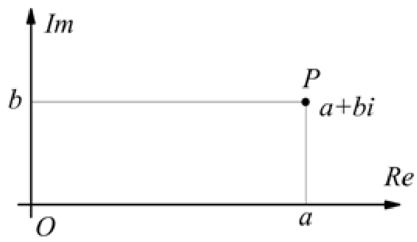
$$(2 + 3i) \cdot (4 - 5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 8 + 2i - 15 \cdot (-1) =$$
$$15 + 8 + 2i = 23 + 2i$$

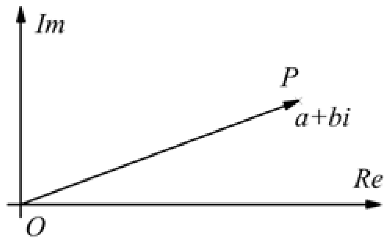
Divisione : per dividere due numeri complessi si moltiplicano numeratore e denominatore della frazione per il coniugato del denominatore.

$$\frac{(2+3i)}{(4-5i)}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{8+10i+12i+15i^2}{16+\cancel{20i}-\cancel{20i}-25i^2}=\frac{8+22i-15}{16+25}=\frac{-7+22i}{41}=$$
$$-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$$

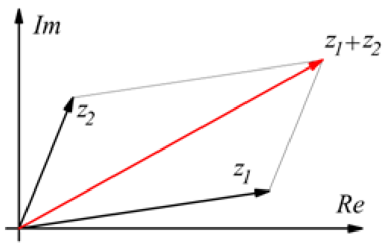
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI NUMERI COMPLESSI

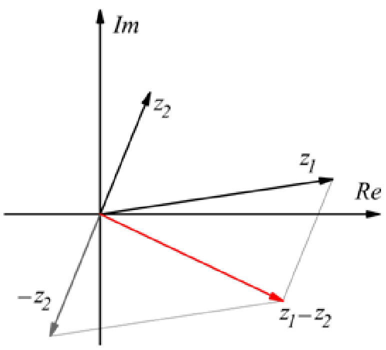
Il numero complesso a+bi può essere rappresentato da un punto P con coordinate (a,b). Il punto O che ha coordinate (0, 0) e che rappresenta il numero complesso 0+0i=0.
Tutti i punti dell'asse orizzontale, delle ascisse, rappresentano i numeri reali.
Tutti i punti dell'asse verticale, delle ordinate, rappresentano i numeri immaginari.
Per questa ragione l'asse orizzontale viene chiamato asse reale.
L'asse verticale viene chiamato asse immaginario.
Il piano cartesiano che ha queste caratteristiche viene chiamato piano complesso o piano di Gauss.





Sul piano complesso, oltre che dal punto P, un numero complesso può essere rappresentato dal vettore OP.





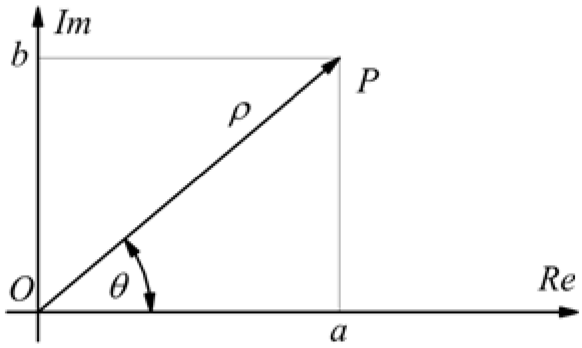
Trattandosi di vettori, per i numeri complessi l'operazione di somma e differenza può essere eseguita anche graficamente, tramite la regola del parallelogramma o attraverso il metodo punta-coda, già visto nel caso dei vettori.

Forma polare di numeri complessi

Oltre alla forma algebrica o binomiale appena vista, i numeri complessi possono essere rappresentati attraverso la forma polare.

In pratica, invece di usare le due coordinate cartesiane a e b, si usano le due coordinate polari ρ e θ. ρ=modulo o intensità del vettore; cioè (graficamente) la sua lunghezza.

θ=argomento (o fase) cioè l'angolo che il vettore forma con l'asse reale.



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$ **modulo**

$$\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$ **argomento**

Dopo aver specificato che gli argomenti sono positivi se si svolgono in senso antiorario rispetto l'asse reale, dalla trigonometria si ha:

$$a = \rho \cdot cos\,\theta \qquad b = \rho \cdot sin\,\theta$$

La forma polare di un numero complesso è dunque $\rho\, e^{i\theta}$ con

e=numero di Neper=2,2718.. in pratica la relazione fra forma polare e forma vettoriale binomiale è

$$\rho e^{i\theta} = \rho\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta\,)$$

se ρ=1 e θ=π la precedente formula diventa

$e^{i\pi} + 1 = 0$ nota come la **formula di Eulero**.

L'importanza della formula di Eulero sta nel fatto che essa stabilisce, tramite i numeri complessi, la stretta relazione che esiste tra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche.

La forma sinusoidale o trigonometrica è invece $\boldsymbol{\rho\ (sin\ wt + \Theta)}$ dove $\boldsymbol{w=2\pi f=2\pi/T}$ essenedo $\boldsymbol{f=1/T}$

La forma polare è particolarmente vantaggiosa quando si devono eseguire moltiplicazioni e divisioni fra numeri complessi.

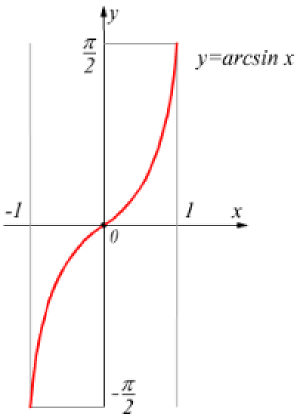
$$A = 8e^{i60^\circ} \qquad B = 2e^{i20^\circ}$$

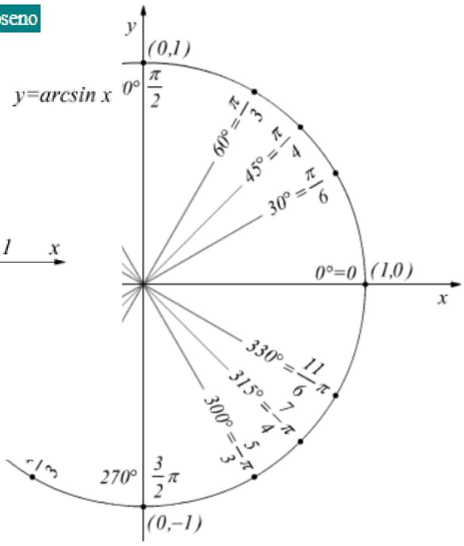
$$A \cdot B = (8 \cdot 2)e^{i(60^\circ + 20^\circ)} = 16e^{i80^\circ} =$$

$$= 16(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ) = 2{,}77 + 15{,}75\,i$$

$$\frac{A}{B} = \frac{8e^{i60^\circ}}{2e^{i20^\circ}} = \left(\frac{8}{2}\right)e^{i(60^\circ - 20^\circ)} = 4e^{i40^\circ} = 3 + 2{,}57\,i$$

Funzione inversa arcoseno



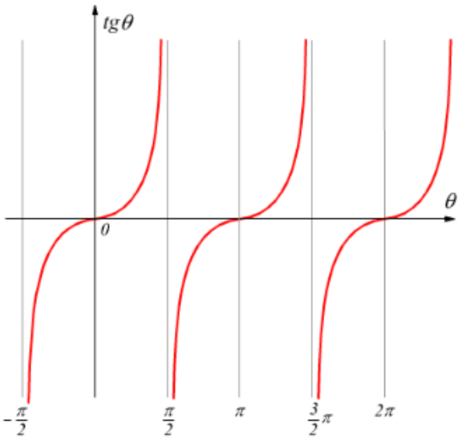


Angoli particolari

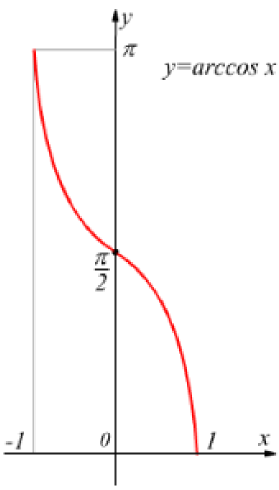
gradi	radianti	sin	cos	tg	ctg
0°	0	0	1	0	non esiste
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste	0
180°	π	0	- 1	0	non esiste
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste	0
360°	2π	0	1	0	non esiste

$rad = \frac{\pi}{180} \cdot gradi$ per trovare i radianti partendo dai gradi

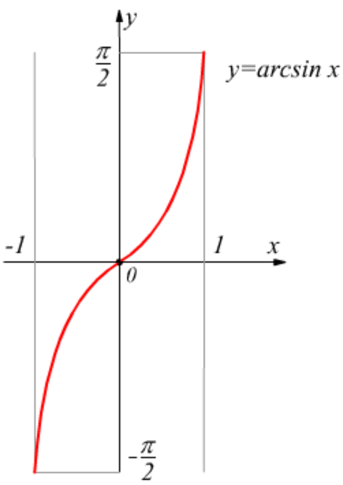
$gradi = \frac{180}{\pi} \cdot rad$ per trovare i gradi partendo dai radianti

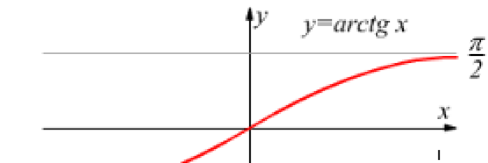


Funzione inversa arcocoseno



Funzione inversa arcoseno



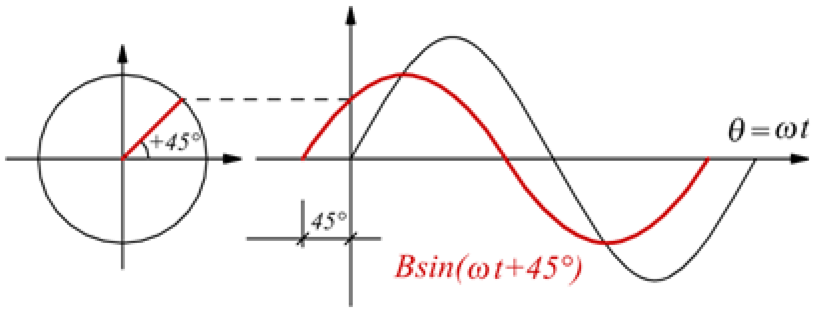


Funzione inversa arcotangente

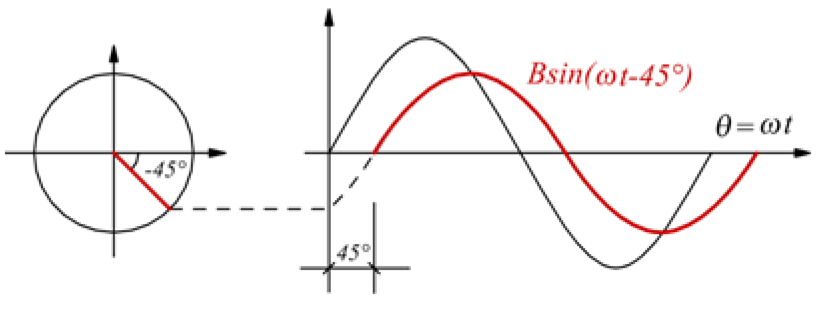
se appunto $x = \sin y \longrightarrow y = \arcsin x$

FASE

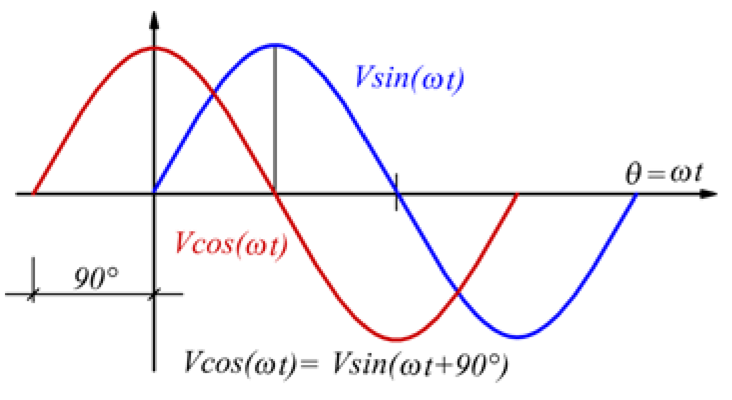
La fase è una misura angolare che caratterizza la posizione del segmento V ad ogni istante della sua rotazione, Particolare importanza assume il valore della fase iniziale φ :la fase che caratterizza il vettore all'istante t=0.



esempio di sinusoide in anticipo di fase di 45° rispetto alla sinusoide originaria di fase 0: Vsin(ω t).



esempio di sinusoide in ritardo di fase di 45° rispetto alla sinusoide originaria di fase 0: Vsin(ω t).

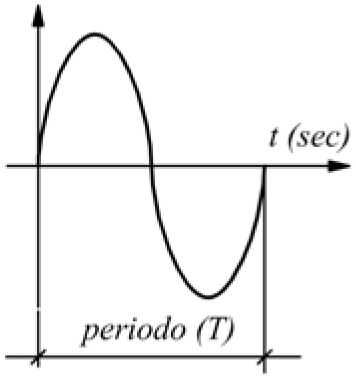


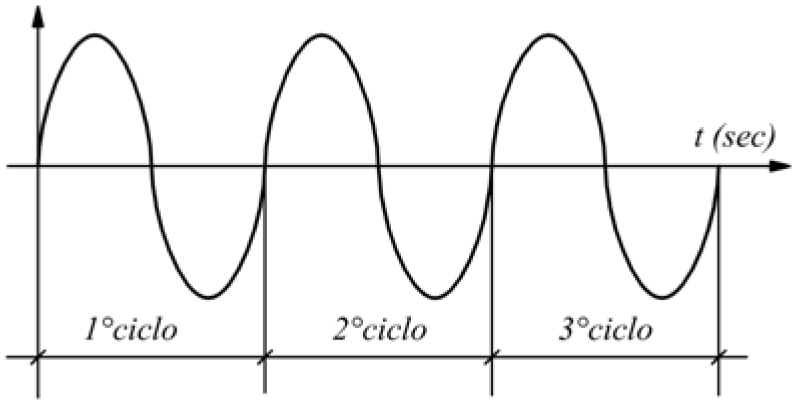
E' importante notare come sia indifferente usare la funzione seno o quella coseno per descrivere grandezze di questo tipo, data l'esistenza della relazione:

$$sin(90° + \alpha) = cos\,\alpha$$

e di altre.

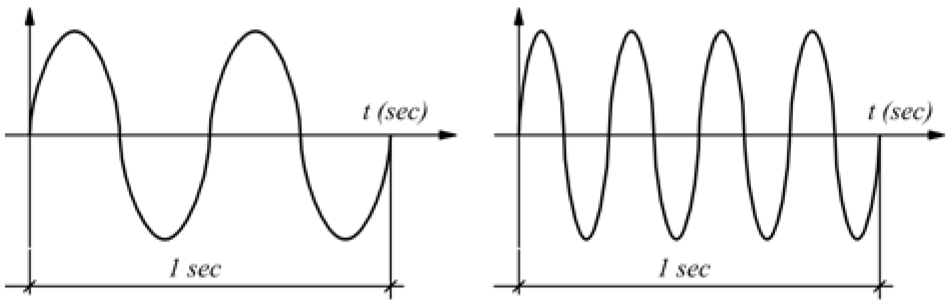
PERIODO E FREQUENZA





Il periodo di un'onda sinusoidale è il tempo impiegato dall'onda per compiere un intero ciclo, l'onda è caratterizzata dal fatto che compie lo stesso ciclo in modo ripetuto. Il ciclo di un'onda alternata si misura in secondi.
Un altro importante parametro è la frequenza che è il numero di cicli compiuti nell'unità di tempo (in 1 secondo).

$$f = \frac{1}{T}$$ [Hertz] [Hz]



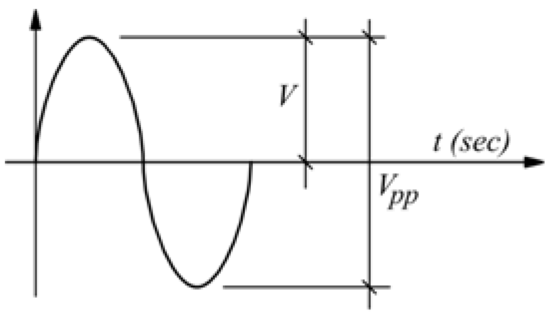
in figura la sinusoide di destra compie un numero di cicli doppio rispetto alla sinusoide di sinistra: essa ha un periodo che è la metà della sinusoide di sinistra.
Importante è la relazione fra frequenza, periodo e pulsazione:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

per le funzioni sinusoidali è rilevante anche il parametro:

$V_e = \frac{V}{\sqrt{2}}$ valore efficace della funzione, con V ampiezza (valore massimo) dell'onda

si ricorda che il valore delle grandezze elettriche viene fornito sempre sotto forma di valore efficace.

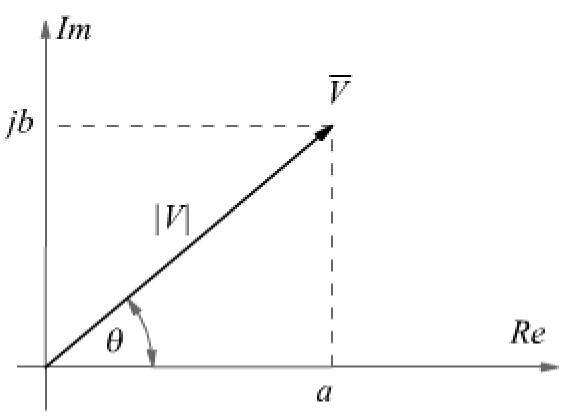


Più intuitiva è la nozione di valore 'picco a picco' di una sinusoide.

$$V_{pp} = 2V$$

L'elaborazione delle grandezze alternate sinusoidali è facilitata dalla teoria matematica dei numeri complessi.

FORMA SIMBOLICA



La grandezza elettrica, viene in questo caso rappresentata sul piano dei numeri complessi tramite un vettore V che ha il suo punto di applicazione nell'origine degli assi.

Il vettore V può essere definito con le sue due proiezioni sugli assi cartesiani, scrivendo:

$$\overline{V} = a + jb$$

dove j è l'operatore immaginario $j = \sqrt{-1}$ a viene chiamata la parte reale di V, mentre b è la parte immaginaria di V. Questa, viene detta forma binomiale del vettore V.

Dobbiamo immaginare questa, come la posizione iniziale del vettore rotante, all'istante t=0.

Una forma alternativa a quella binomiale, è la forma polare:

$$\overline{V} = |V|\ e^{j\theta}$$

dove |V| è il modulo del vettore, cioè la sua lunghezza,θ è la fase iniziale del vettore ed e=2.718.. è il numero di Neper.
La forma binomiale e quella polare sono legate dalle relazioni:

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = atg\left(\frac{b}{a}\right)$$

mentre (per la trigonometria)

$$a = |V|\ cos\theta \qquad b = |V|\ sin\theta$$

Da queste considerazioni si deduce che possiamo definire una grandezza alternata sinusoidale, attraverso almeno tre forme:

forma sinusoidale: $v(t) = |V| \cdot sin(\omega t + \theta)$

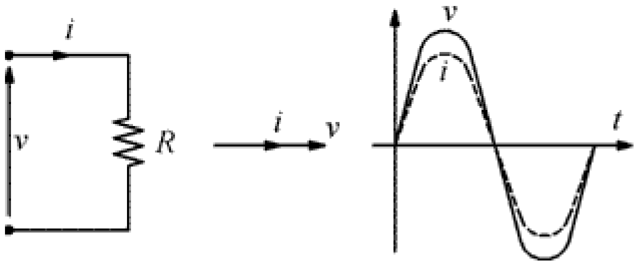
forma vettoriale binomiale: $\overline{V} = a + j \cdot b = |V|\ cos(\theta) + j\,|V|\,sin(\theta)$

forma vettoriale polare: $\overline{V} = |V|\ e^{j\theta}$

La forma binomiale risulta opportuna per la somma o la differenza fra vettori, la forma polare risulta opportuna per la divisione e la moltiplicazione fra vettori.

RESISTENZA

Se si applica una tensione sinusoidale ai capi di una resistenza, la corrente prodotta è sinusoidale ed è in fase con la tensione:



$$v = V \sin(\omega t + \phi)$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V}{R} \sin(\omega t + \phi)$$

REATTANZA INDUTTIVA

Se si applica una tensione sinusoidale ai capi di una induttanza L, la corrente ottenuta è sinusoidale in ritardo di 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rispetto alla tensione e la reattanza offerta dall'induttanza vale:

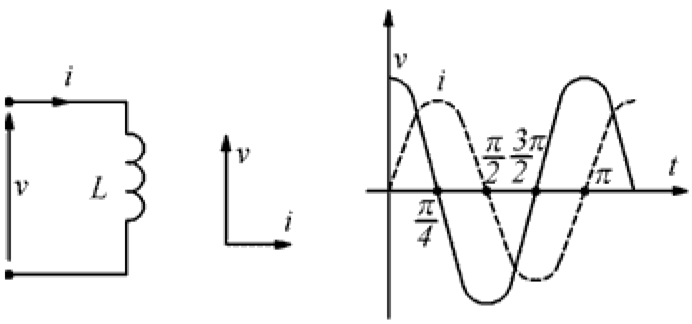
$$X_L = \omega L \quad [\Omega]$$

se la tensione applicata è $v = V \sin(\omega t + \phi)$

$$i = \frac{v}{X_L} = \frac{V}{\omega L} \sin(\omega t + \phi)$$

usando i numeri complessi si scriverebbe:

$$\overline{X}_L = jX_L = j\omega L$$ quindi:



$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{X}_L} = \frac{\overline{V}}{jX_L} = \frac{\overline{V}}{j\omega L}$$

REATTANZA CAPACITIVA

Se si applica una tensione sinusoidale ai capi di un condensatore C la corrente impressa è sinusoidale, in anticipo di 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rispetto alla tensione e la reattanza del condensatore è:

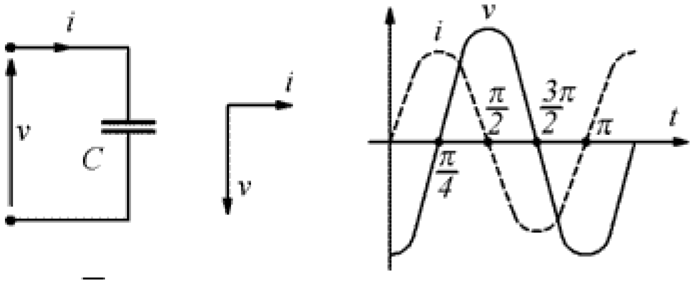
$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

se la tensione applicata è $v = V\,sin(\omega t + \phi)$

$$i = \frac{v}{X_C} = \omega C V\,sin(\omega t + \phi)$$

usando i numeri complessi si avrebbe:

$$\overline{X}_C = -jX_L = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$ quindi:



$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{X}_C} = -j\omega C\overline{V}$$

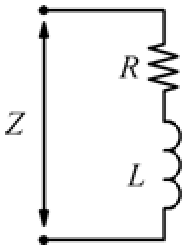
IMPEDENZA

Una volta acquisito che la reattanza offerta da un'induttanza e da un condensatore valgono

$$\overline{X}_L = jX_L = j\omega L \qquad [\Omega]$$

$$\overline{X}_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} \qquad [\Omega]$$

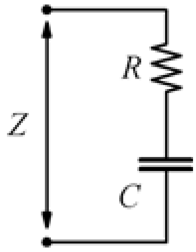
Si può risalire all'impedenza Z offerta da circuiti anche complessi.
Alcuni esempi immediati sono i seguenti:



$$\overline{Z} = R + jX_L$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

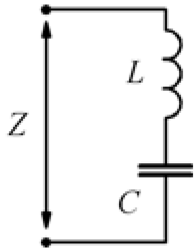
$$\theta = atg\frac{X_L}{R}$$



$$\overline{Z} = R - jX_C$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$\theta = atg\left(-\frac{X_C}{R}\right)$$



$$\overline{Z} = jX_L - jX_C$$

$$Z = X_L - X_C$$

$$\theta = \pm 90^\circ$$