1.3 VARIABILI COMPLESSE E FASORI

Le relazioni circuitali per onde sinusoidali possono essere convenientemente descritte con diagrammi di vettori. Di solito non si tratta di veri vettori, e si parla di diagrammi di fasori, o rotori. Questi vettori simbolici che sono i fasori si suppongono ruotare nella direzione standard antioraria e generare l'onda sinusoidale (Fig. 1-8). Come riferimento si può usare la tensione o la corrente e compaiono in questo caso in posizione zero o in posizione ore tre.

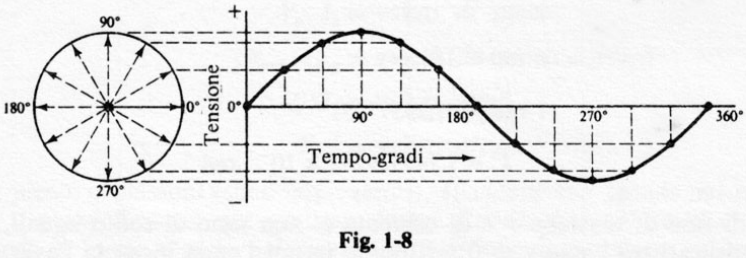

Fig. 1-8

Quando i fasori si trovano reciprocamente ad angolo retto (in *quadratura*), possiamo rappresentare le proiezioni sull'asse reale e su quello di quadratura per mezzo di variabili complesse.

Se per esempio due tensioni differiscono in fase di 90° potremo rappresentarne la somma scrivendo

$$V_T = V_1 + jV_2 \qquad (1\text{-}14)$$

E questo si vede graficamente in Fig. 1-9.

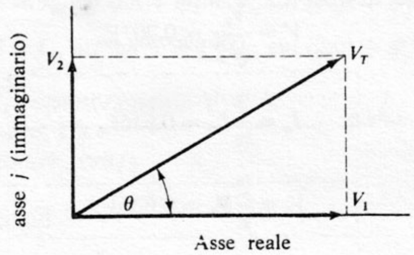

Fig. 1-9

L'equazione (*1.14*) rappresenta la forma rettangolare di una variabile complessa. Il termine j rappresenta un operatore che fa ruotare un fasore assegnato di 90° e sta a significare che il termine non può essere sommato algebricamente. In alcuni testi di algebra l'operatore j viene rappresentato con i e si chiama *immaginario*. Se l'operatore j viene moltiplicato per se stesso, il risultato è una rotazione di 180°, per cui $j^2 = -1$. Oltre alla forma rettangolare le variabili complesse possono essere scritte in forma polare e euleriana.

La forma polare $V_T \underline{/\theta}$ si usa per descrivere il modulo del fasore a un dato angolo con l'asse delle x (reale).

La forma euleriana $V_T \epsilon^{j\theta}$ si scrive anche talvolta

$$\boxed{V_T \epsilon^{j\theta} = V_T \cos\theta + jV_T \sin\theta}$$

Quando in questo libro ci serviremo delle variabili complesse le rappresenteremo in grassetto. Per esempio una tensione complessa verrà scritta **V**.

Addizione e sottrazione di variabili complesse sono più agevoli nella forma rettangolare; moltiplicazione e divisione lo sono in quella polare. La tabella 1-3 riporta le operazioni aritmetiche fondamentali per due fasori $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, in cui

$$\mathbf{V}_1 = V_1 \underline{/\theta_1} = V_{r1} + jV_{x1}$$

$$\mathbf{V}_2 = V_2 \underline{/-\theta_2} = V_{r2} - jV_{x2}$$

Tabella 1-3

Operazione	Risultato
$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ o $\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1$	$(V_{r1} + V_{r2}) + j(V_{x1} - V_{x2})$
$\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$	$(V_{r1} - V_{r2}) + j(V_{x1} + V_{x2})$
$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$	$(V_{r2} - V_{r1}) - j(V_{x1} + V_{x2})$
$(\mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2)$ o $(\mathbf{V}_2)(\mathbf{V}_1)$	$(V_1)(V_2)\underline{/(\theta_1 - \theta_2)}$
$\mathbf{V}_1 \div \mathbf{V}_2$	$\frac{V_1}{V_2}\underline{/(\theta_1 + \theta_2)}$
$\mathbf{V}_2 \div \mathbf{V}_1$	$\frac{V_2}{V_1}\underline{/-(\theta_1 + \theta_2)}$

Un'altra utile definizione a proposito delle variabili complesse è il complesso *coniugato*. Due numeri complessi si dicono coniugati quando i loro valori reali sono uguali in modulo e polarità e quelli immaginari sono uguali per modulo ma opposti in polarità.

La notazione del complesso coniugato di $\mathbf{A}$ è $\mathbf{A}^*$. Se per esempio $\mathbf{Z} = R + jX$, avremo $\mathbf{Z}^* = R - jX$.

In tabella 1-4 vediamo alcune forme di numeri coniugati.

impед. resist. reattanza

$Z = R + jX$

ammett. suscettanza

$Y = G + jB$

cond.

Tabella 1-4

Numero complesso	Coniugato
$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}^*$
$\pm A \pm jB$	$\pm A \mp jB$
$Z\underline{/\pm\theta}$	$Z\underline{/\mp\theta}$
$Z\epsilon^{\pm j\theta}$	$Z\epsilon^{\mp j\theta}$

$Z \qquad Y = \frac{1}{Z}$