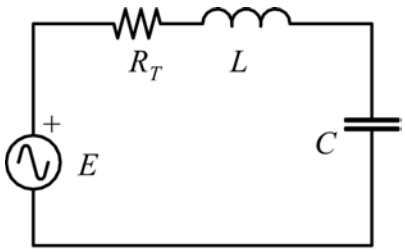
Circuiti Risonanti serie:Riepilogo delle regole



Sono circuiti costituiti da una bobina L, una resistenza R che può anche solamente coincidere con la resistenza serie derivante dalle perdite della bobina R_b ed una capacità C posti in serie, alimentati da un generatore $\overline{E}$ che in genere ha una resistenza interna R_i. Se consideriamo $R_T=R+R_b+R_i$. Si può fare riferimento al circuito illustrato.

Si usa la seguente nomenclatura:

ω_0, f_0 = pulsazione e frequenza di risonanza

B=banda passante del circuito risonante

f_1,f_2=frequenze di taglio a cui la corrente si riduce a $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ con I_0 la corrente in condizioni di risonanza.

Q_b= coefficiente di qualità della bobina $Q_b=\frac{\omega_0 L}{R_b}$

Q= coefficiente di risonanza del circuito $Q=\frac{\omega_0 L}{R_T}$ dove R_T è la resistenza totale vista ai morsetti dell'induttanza L col generatore E cortocircuitato.

Valgono le relazioni:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{da cui} \quad f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad B=f_2-f_1=\frac{f_0}{Q}$$

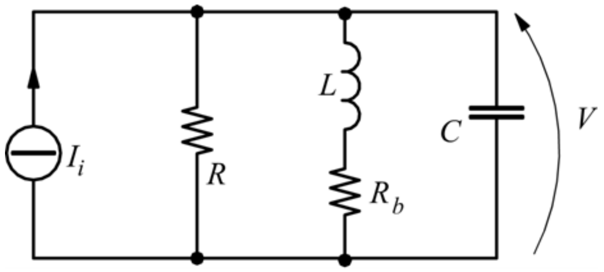
$$Q=\frac{\omega_0 L}{R_T}=\frac{1}{\omega_0 C R_T} \qquad \overline{I}_0=\frac{\overline{E}}{R_T}$$

per $\omega=\omega_0$ si ha $V_C=V_L=QE$ essendo V_C e V_L le tensioni ai capi del condensatore e della bobina.

Per $\omega=\omega_0$ il comportamento del circuito è resistivo
Per $\omega<\omega_0$ il comportamento del circuito è capacitivo
Per $\omega>\omega_0$ il comportamento del circuito è induttivo

Circuiti risonanti parallelo: Riepilogo delle regole

Sono costituiti dal parallelo fra un'induttanza L (che ha in serie una resistenza R_b) ed una capacità C. Vengono alimentati da un generatore di corrente I_0 che ha in parallelo una sua resistenza interna R_0 secondo lo schema illustrato.



Valgono le stesse notazioni viste per i circuiti risonanti serie, per □$_0$, f_0 B e Q_b, inoltre:

f_1,f_2= frequenze a cui la tensione si riduce a $\dfrac{V_0}{\sqrt{2}}$ con V_0, tensione ai capi del parallelo in condizioni di risonanza.

R_{p0}= Resistenza parallela della bobina $R_{p0}=\dfrac{\omega_0^2 L^2}{R_b}=Q_b\omega_0 L=Q_b^2 R_b$ (la resistenza che può essere messa in parallelo al remo induttivo eliminando la R_b)
R_T=Resistenza complessiva del circuito risonante, uguale alla resistenza vista ai morsetti del condensatore C con I_i aperto. Quando al posto di R_b venga posta R_{p0}.

Q= coefficiente di risonanza del circuito $Q=\dfrac{R_T}{\omega_0 L}$

Si hanno inoltre, le relazioni:

$$\bar{V}_0=\bar{I}_0 R_T$$

$$Q=\frac{R_T}{\omega_0 L}=\omega_0 C R_T$$

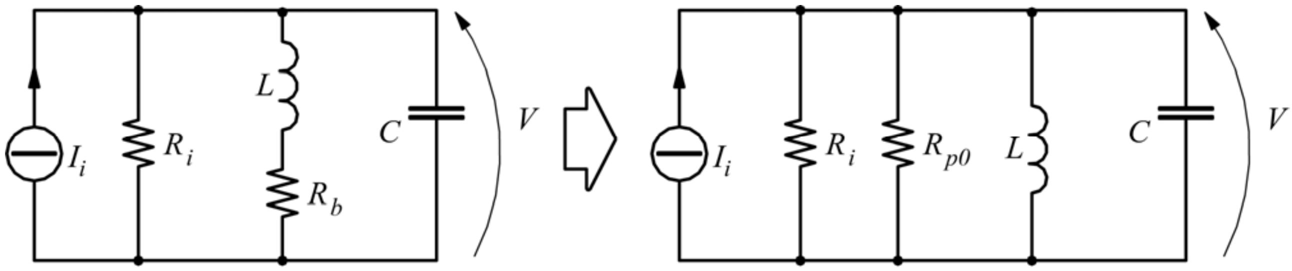
Per $\omega=\omega_0$: $I_C=I_L=QI_i$; Si può constatare che

Per $\omega=\omega_0$ il comportamento del circuito è resistivo
Per $\omega<\omega_0$ il comportamento del circuito è induttivo (contr.al caso serie)
Per $\omega>\omega_0$ il comportamento del circuito è capacitivo (contr.al caso serie)

Esercizio no.1

soluzione a pag.5

Un generatore con resistenza interna R_i=50kΩ, alimenta alla frequenza di risonanza f_0=12kHz, un circuito RCL parallelo formato da una bobina di induttanza L=40mH e Q_b=14.

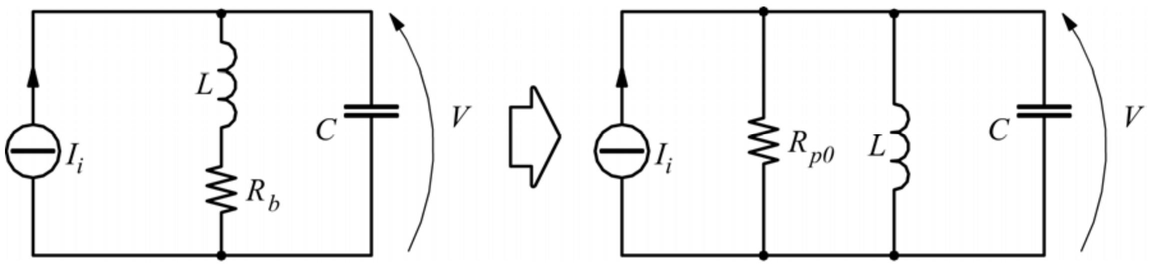


Calcola:
- La capacita C del condensatore
- Il coefficiente di risonanza Q
- La banda passante B

Esercizio no.2

soluzione a pag.6

Il circuito risonante parallelo illustrato:



risuona alla frequenza di 500kHz e alla risonanza presenta una resistenza R_{p0}=20kΩ con un coefficiente di qualità della bobina Q_b=25.
Determina l'induttanza della bobina, la sua resistenza serie, la capacità e la banda passante del circuito .

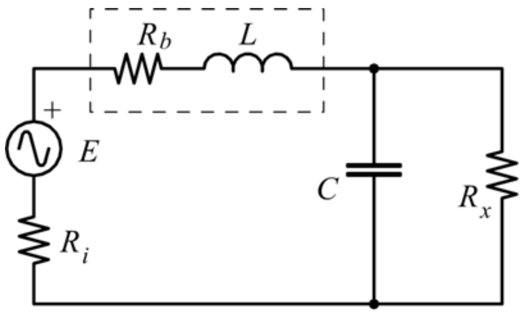
Esercizio no.3

soluzione a pag.7

Un circuito risonante serie, risuona alla frequenza di 1MHz e quando la frequenza differisce da quella di risonanza di 10kHz la corrente si riduce al 70% della corrente massima (di risonanza). Calcola il coefficiente di risonanza Q, l'induttanza e la resistenza serie complessiva del circuito, sapendo che C=100pF.

Esercizio no.4 soluzione a pag.8

Nel circuito illustrato si trovi alla risonanza l'induttanza e il fattore di qualità Q_b della bobina sapendo che il coefficiente di risonanza Q=20.



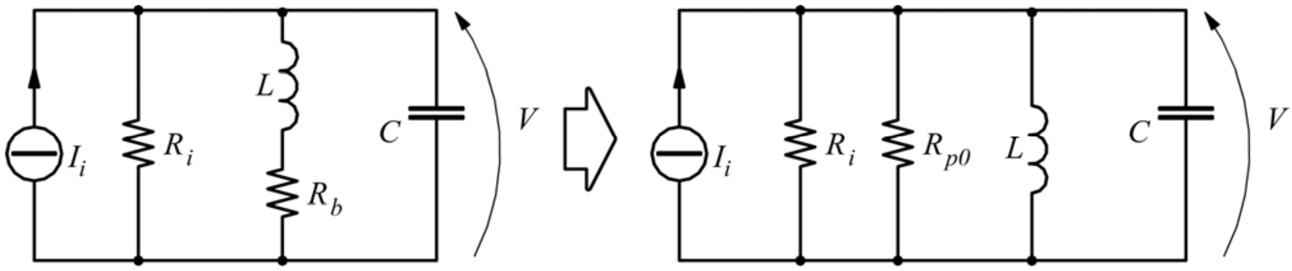
$$E = 25V$$
$$R_i = 15\Omega$$
$$R_x = 100k\Omega$$
$$C = 1000\,pF$$
$$f_0 = 159Hz$$

Esercizio no.5 soluzione a pag.9

Un circuito risonante serie risulta avere una banda passante B=10kHz ed un coefficiente di risonanza Q=100.
Sapendo che la resistenza serie del circuito è di 10Ω, calcolare il valore dell'induttanza L e della capacità C.

Esercizio no.1

Un generatore con resistenza interna R_i=50kΩ, alimenta alla frequenza di risonanza f_0=12kHz, un circuito RCL parallelo formato da una bobina di induttanza L=40mH e Q_b=14.



Calcola:
- La capacita C del condensatore
- Il coefficiente di risonanza Q
- La banda passante B

Esercizio no.1:soluzione

Alla risonanza $\omega_0 C = \dfrac{1}{\omega_0 L} \quad \rightarrow \quad C = \dfrac{1}{\omega_0^2 L} = \dfrac{1}{(2\pi \cdot 12 \cdot 10^3)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 4{,}4nF$

$$R_{p0} = \frac{\omega_0^2 L^2}{R_b} = Q_b \omega_0 L = 14(2\pi \cdot 12000) \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 42223\Omega = 42k\Omega$$

Dal disegno si ha che la resistenza totale del circuito è

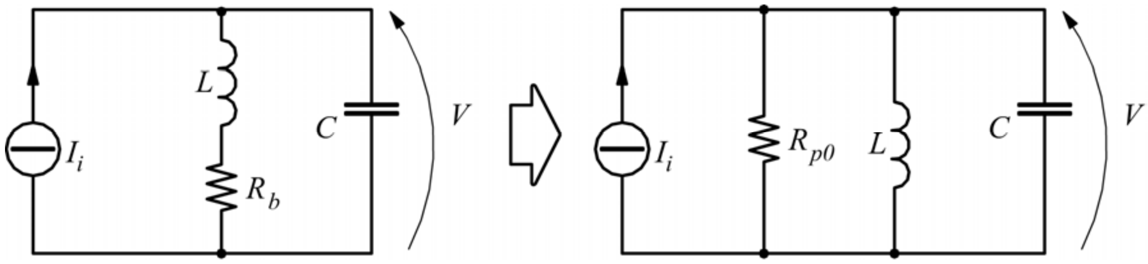
$$R_T = R_i \,//\, R_{p0} = 23k\Omega$$

$$Q = \frac{R_T}{\omega_0 L} = \frac{23000}{2\pi \cdot 12000 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 7{,}5$$

$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{12000}{7{,}5} = 1573Hz$$

Esercizio no.2

Il circuito risonante parallelo illustrato:



risuona alla frequenza di 500kHz e alla risonanza presenta una resistenza R_{p0}=20kΩ con un coefficiente di qualità della bobina Q_b=25.
Determina l'induttanza della bobina, la sua resistenza serie, la capacità e la banda passante del circuito .

Esercizio no.2:soluzione

$$R_{p0} = \frac{\omega_0^2 L^2}{R_b} = Q_b \omega_0 L = Q_b^2 R_b$$

$$20 \cdot 10^3 = 25 \cdot 2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 L \;\rightarrow\; L = \frac{20}{25 \cdot 2\pi \cdot 500} = 2{,}546 \cdot 10^{-4} H = 254{,}6 \cdot 10^{-6} = 254{,}6\,\mu H$$

dalla stessa relazione si ottiene: $R_{p0} = Q_b^2 R_b \;\rightarrow\; R_b = \frac{R_{p0}}{Q_b^2} = \frac{20.000}{25^2} = 32\Omega$

alla risonanza si ha :

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{254{,}6 \cdot 10^{-6}(2\pi \cdot 500 \cdot 10^3)^2} = 3{,}97 \cdot 10^{-10} \cong 400\,pF$$

$$Q = \frac{R_T}{\omega_0 L} = \omega_0 C R_T = \omega_0 C R_{p0} = 2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 400 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^3 = 25 \equiv Q_b$$

$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{500}{25} = 20kHz$$

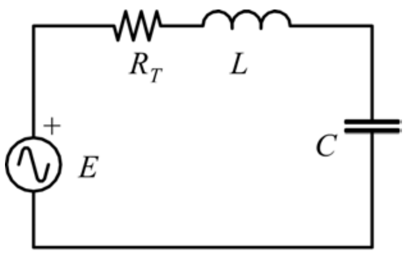
Esercizio no.3

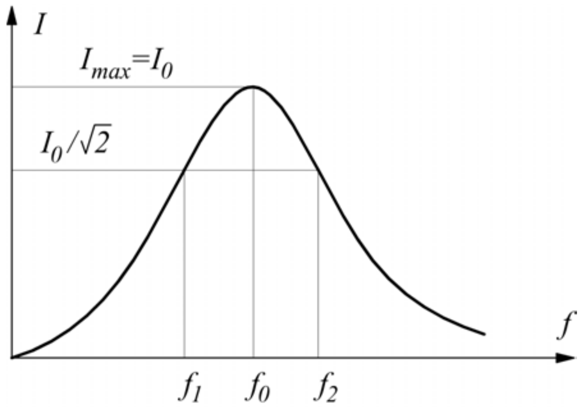
Un circuito risonante serie, risuona alla frequenza di 1MHz e quando la frequenza differisce da quella di risonanza di 10kHz la corrente si riduce al 70% della corrente massima (di risonanza). Calcola il coefficiente di risonanza Q, l'induttanza e la resistenza serie complessiva del circuito, sapendo che C=100pF.

Esercizio no.3:soluzione

Ovviamente per le considerazioni che valgono sulla larghezza di banda,sarà:

$$f_1 = 1000 - 10 = 990kHz \qquad f_1 = 1000 + 10 = 1010kHz$$





$B = f_2 - f_1 = 1010 - 990 = 20kHz$ poi dalla $B = \dfrac{f_0}{Q}$ si ha:

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{10^6}{20 \cdot 10^3} = 50$$

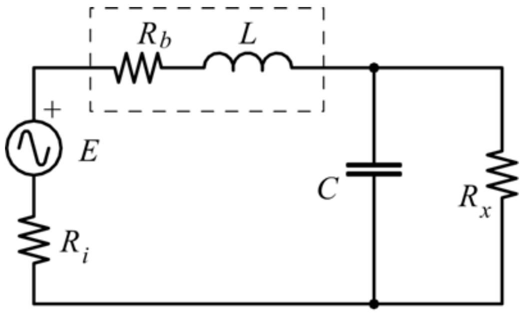
per cui se $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow \sqrt{LC} = \dfrac{1}{2\pi \cdot f_0} \rightarrow L = \dfrac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$

$L = \dfrac{1}{4\pi^2 10^{12} \cdot 10^{-10}} = 253 \cdot 10^{-6} H = 253\ \mu H$ dato che

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_T} \rightarrow R_T = \frac{\omega_0 L}{Q} = \frac{2\pi \cdot f_0 L}{Q} = \frac{2\pi \cdot 10^6 253 \cdot 10^{-6}}{50} = 32\ \Omega$$

Esercizio no.4

Nel circuito illustrato si trovi alla risonanza l'induttanza e il fattore di qualità Q_b della bobina sapendo che il coefficiente di risonanza Q=20.



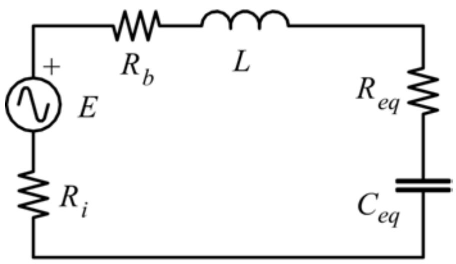
$$E = 25V$$
$$R_i = 15\Omega$$
$$R_x = 100k\Omega$$
$$C = 1000\,pF$$
$$f_0 = 159Hz$$

Esercizio no.4:soluzione

Purtroppo ci tocca calcolare l'impedenza equivalente fra il condensatore e la resistenza R_x.

$$Z_{eq} = \frac{R \cdot \dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{10^5(-j10^3)}{10^5 - j10^3} = \frac{-j10^5}{100 - j} \cong -\frac{j(100 + j)10^5}{10^4} = 10 - j1000$$

Si può notare come la capacità equivalente abbia lo stesso valore di C. Il circuito si trasforma nel modo seguente:



Ovviamente, alla risonanza,

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C_{eq}} \quad \to \quad L = \frac{1}{\omega_0^2 C_{eq}} = \frac{10^3}{10^6} = 1mH$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_T} = \frac{\omega_0 L}{R_b + R_i + R_{eq}} \quad \to \quad R_b = \frac{\omega_0 L - Q(R_i + R_{eq})}{Q} = \frac{10^3 - 20(15 + 10)}{20} = 25\Omega$$

segue per Q_b: $Q_b = \dfrac{\omega_0 L}{R_b} = \dfrac{10^3}{25} = 40$

Esercizio no.5

Un circuito risonante serie risulta avere una banda passante B=10kHz ed un coefficiente di risonanza Q=100.
Sapendo che la resistenza serie del circuito è di 10Ω, calcolare il valore dell'induttanza L e della capacità C.

Esercizio no.5:soluzione

Basandosi sulle relazione:

$$B = \frac{f_0}{Q} \quad \rightarrow \quad f_0 = BQ = 10^4 \cdot 10^2 = 10^6\,Hz$$

$$\omega_0 = 2\pi\, f_0 = 2\pi \cdot 10^6 = 6{,}28 \cdot 10^6 \quad rad/s$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_T} \quad \rightarrow \quad L = \frac{R_T Q}{\omega_0} = \frac{10 \cdot 100}{6{,}28 \cdot 10^6} = 0{,}159 \cdot 10^{-3} = 0{,}159mH = 159\mu H$$

ma è anche $Q = \frac{1}{\omega_0 C R_T} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega_0 Q R_T} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 10^2 \cdot 10} = 0{,}159 \cdot 10^{-9}\,F$

Quindi è $C = 0{,}159nF = 159\,pF$